

圧縮性 CFD スキームによる 低マッハ数流れの 高精度・高効率な解析手法について

2021 年度将来回転翼機研究会／回転翼解析技術交流会

嶋英志

宇宙航空研究開発機構 (JAXA)

はじめに

10年以上にわたってSLAUなど圧縮性CFDスキームで低マッハ数流れを計算できる全速度スキーム^[1]を研究してきた。

全速度陰解法GC-SMAC^[2]は理論的にも実用的にも良いスキームと考えているが、個人的な研究主体を静粛eVTOLに切り替えたので、アピールの機会がなく、価値が認められないのは残念。

機会をいただいたのでアピールしておきたい。

[1] 嶋, 簡単な圧縮性CFDスキームの話, 日本流体力学会誌「ながれ」 34 (2015) 67-79

[2] 嶋, 北村, 陰的MUSCL法とSMAC法の統合による全速度圧縮性CFD解法について, 日本流体力学会誌「ながれ」 35 (2016) 391-401

回転翼空力との関係

ヘリコプタロータ空力は遷音速と低マッハ数の混在した流れに支配される。

この領域で安定に精度よく計算できる全速度Riemann流速SLAUにより回転翼機解析の解像度を大幅に改善できた。

rFlow-3Dなどによりロータの非定常CFDも幅広く研究開発に用いられるようになった。

LU-SGSなどの陰解法にくらべ、GC-SMACIはeVTOLなど低マッハ数流れの非定常流れ場計算を十倍程度の計算時間短縮の可能性が
ある。

用語表 (順不同)

CFD:	Computational Fluid Dynamics
SLAU :	Simple Low Dissipation AUSM
AUSM:	Advection Upstream Splitting Method
FVS:	Flux Vector Splitting method
HLL:	Harten-Lax-van Leer
GC-SMAC:	Generalized Compressible SMAC
SMAC:	Simplified Marker And Cell method
MUSCL:	Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws
LU-ADI:	Lower Upper Alternative Direction Implicit method
LU-SGS:	Lower Upper SGS
MFGS:	Matrix Free GS
TC-PGS:	Time Consistent Preconditioned GS
SGS:	Symmetric GS
GS:	Gauss-Seidel method
SOR:	Successive Over Relaxation

目次

- **はじめに**
- **有限体積法と陰的MUSCLの基本**
- **全速度Riemann流速SLAUの基本的な検証と利用例**
- **全速度陰解法GC-SMAC**
 - **陰解法色々とGC-SMACの特徴**
 - **GC-SMACの導出**
 - **数値例**
- **圧縮性・非圧縮性CFDスキーム相違の鍵**

目次

- はじめに
- **有限体積法と陰的MUSCLの基本**
- 全速度Riemann流速SLAUの基本的な検証と利用例
- 全速度陰解法GC-SMAC
 - 陰解法色々とGC-SMACの特徴
 - GC-SMACの導出
 - 数値例
- 圧縮性・非圧縮性CFDスキーム相違の鍵

有限体積法 (FVM) の基礎方程式

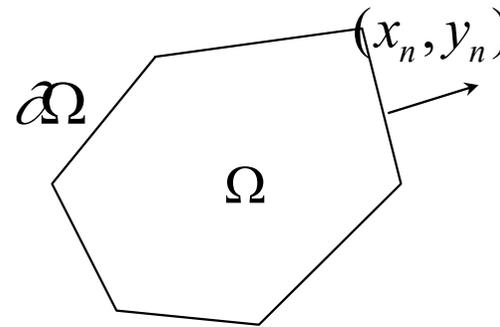
$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{E}_x + \mathbf{F}_y = \mathbf{R}_x + \mathbf{S}_y$$

Inviscid flux, Viscous Flux

$$\int_{\Omega} \mathbf{Q}_t dv + \oint_{\partial\Omega} (\hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{R}}) ds = 0$$

$$\hat{\mathbf{E}} = x_n \hat{\mathbf{E}} + y_n \hat{\mathbf{F}}$$

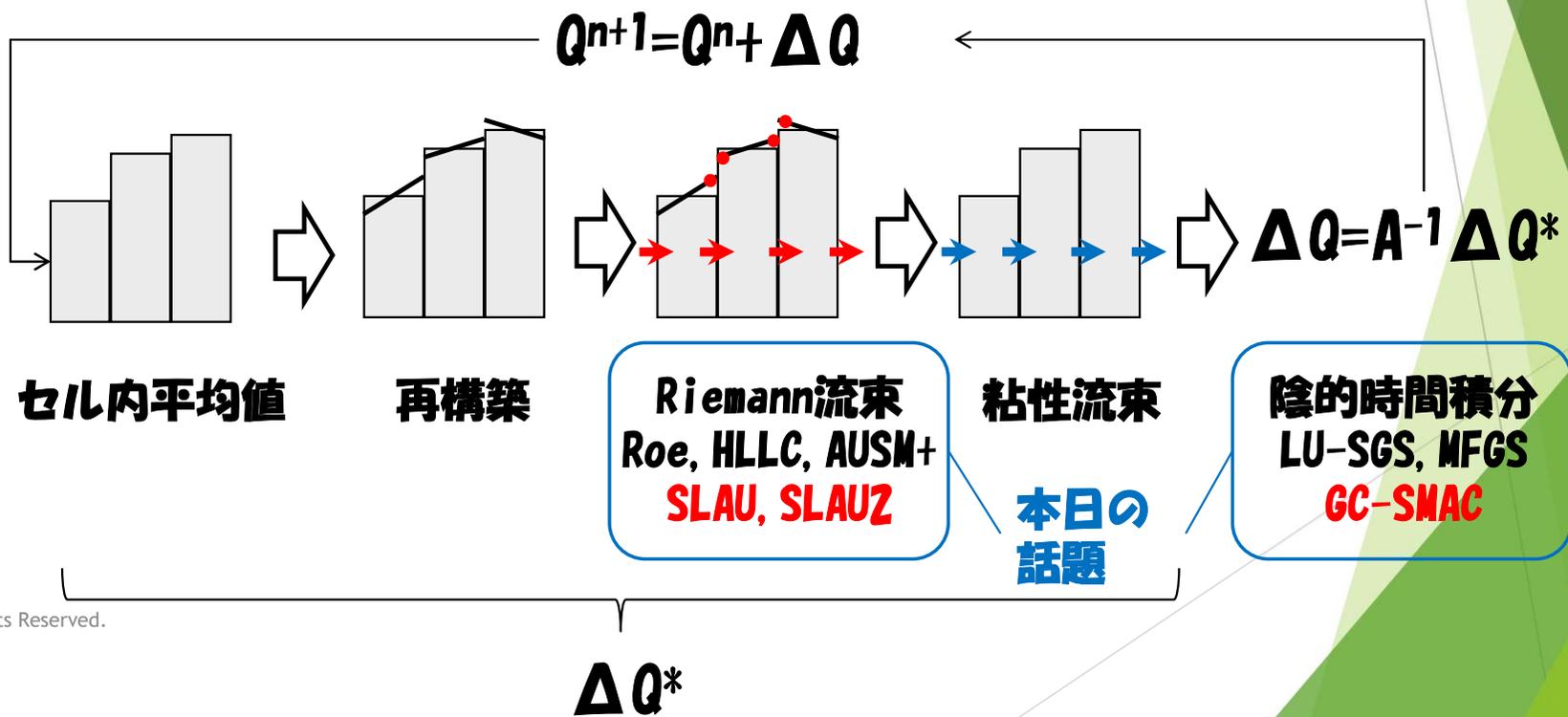
$$\tilde{\mathbf{R}} = x_n \mathbf{R} + y_n \mathbf{S}$$



$$\frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{Q}_i + \frac{1}{V_i} \sum_j (\tilde{\mathbf{E}}_{i,j} - \tilde{\mathbf{R}}_{i,j}) s_{i,j} = 0$$

陰的MUSCLによる圧縮性CFD計算の手順概要

FaSTARやrFlow-3Dのような陰的MUSCL法はほぼ独立したコンポーネント群からなる

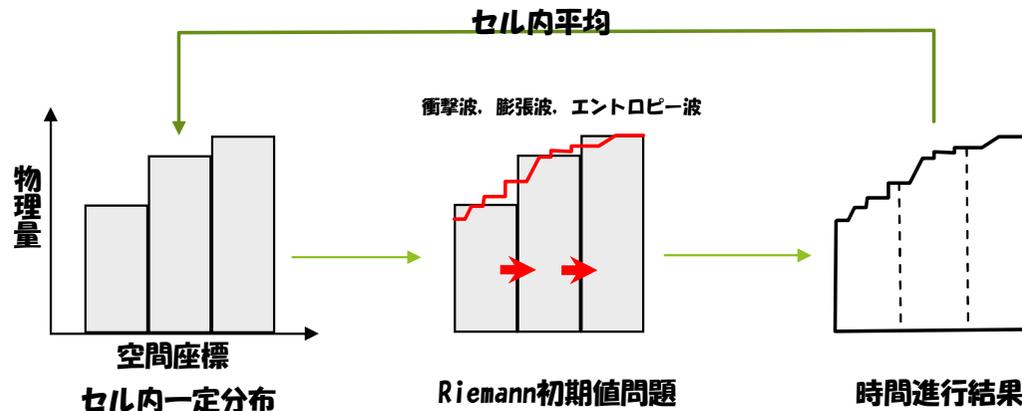


Riemann流束とは？

- ▶ FVMの正確な表面流束には流体方程式の時間発展解が必要だが、堂々巡りでそれは分からない
→空間一次元、階段状初期値の厳密解を非粘性流束として用いる
→Godunovスキーム (→その後高次精度などに拡張されCFDの主流となった)

▶ Godunovスキーム

- ▶ 検査体積内分布を一定とし不連続を含む境界でのRiemann初期値問題解として流束を求める。⇒一般化された衝撃波管問題



▶ Riemann流束

- ▶ セル内平均によりRiemann解の細部は失われ、残るのはセル境界での流束の積分量への影響のみ→Riemann流束

Riemann流束の例：AUSM族スキーム

非粘性流速の定義式

$$\hat{\mathbf{E}} = \dot{m}\Phi + p\mathbf{N} \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ h \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \\ y_n \\ z_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{m} = \rho V_n \quad h = \frac{e + p}{\rho}$$

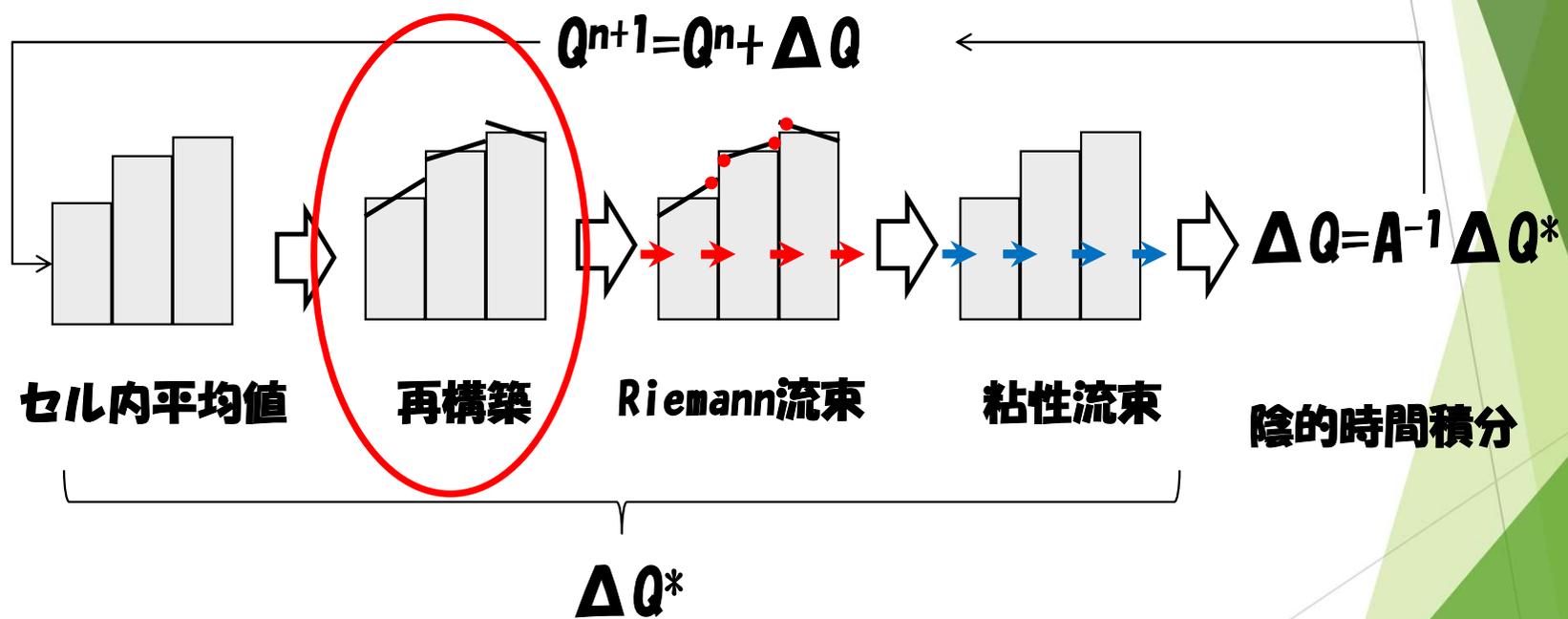
質量流束 トータルエンタルピー

SLAUなどAUSM族Riemann流束は上記定義と類似

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \Phi_L + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \Phi_R + \tilde{p}\mathbf{N}$$

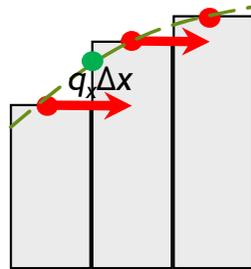
質量流束 \dot{m} と境界圧力 \tilde{p} を定義すれば非粘性流束が決まる。

陰的MUSCLによる圧縮性CFD計算の手順概要

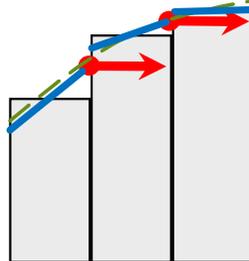


Godnov型スキームの高次精度化

- ▶ Godnov法原型はセル中心の値で流速を定義するので空間一次精度
 - ▶ 表現は違うが一次精度風上法なので



- ▶ 真のセル境界の値と比べて $O(\Delta x)$ の誤差
- ▶ 再構築による高次精度化
 - ▶ Riemann流束適用前に何らかの方法でセル内に物理量分布を構築。流束定義物理量を高次精度化→MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws)



2022 JAXA All Rights Reserved.

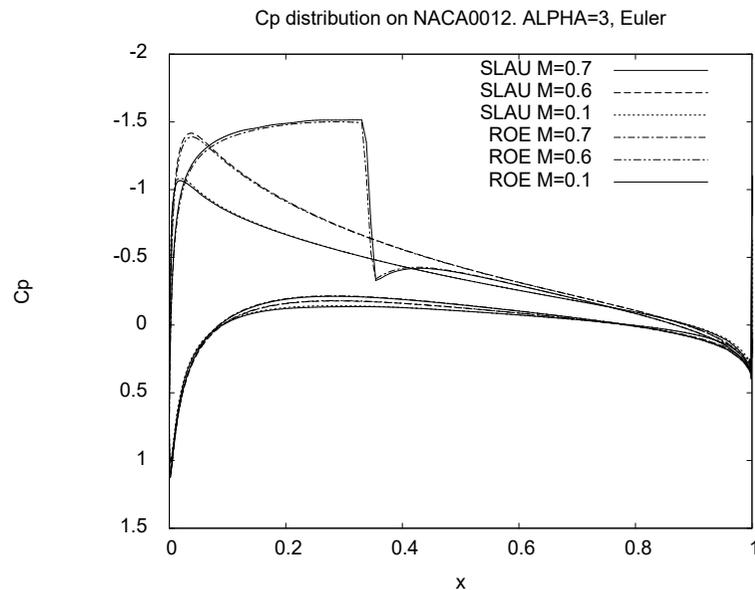
- ▶ van Leerの最初の論文は中々Acceptされなかったらしい。納得しにくくて当然。

目次

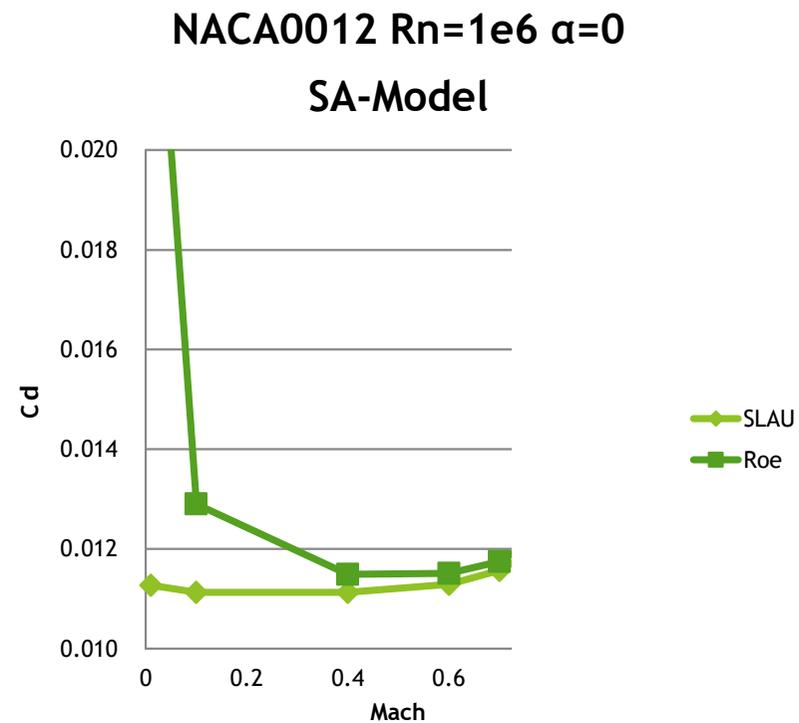
- はじめに
- 有限体積法と陰的MUSCLの基本
- **全速度Riemann流速SLAUの基本的な検証と利用例**
- 全速度陰解法GC-SMAC
 - 陰解法色々とGC-SMACの特徴
 - GC-SMACの導出
 - 数値例
- 圧縮性・非圧縮性CFDスキーム相違の鍵

基本SLAUの特性(1)

NACA0012翼型まわりの非粘性流れ



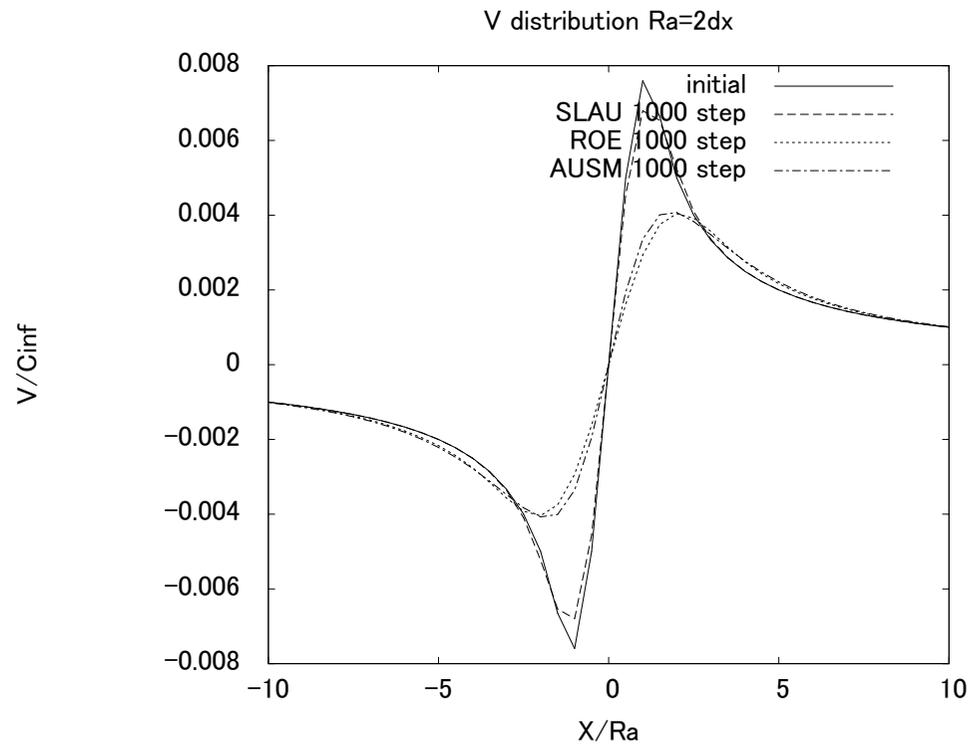
圧力分布



Cdのマッハ数依存性

基本SLAUの特性(2) 定常渦の保存

速度分布



圧力分布

Ps_ratio Contour

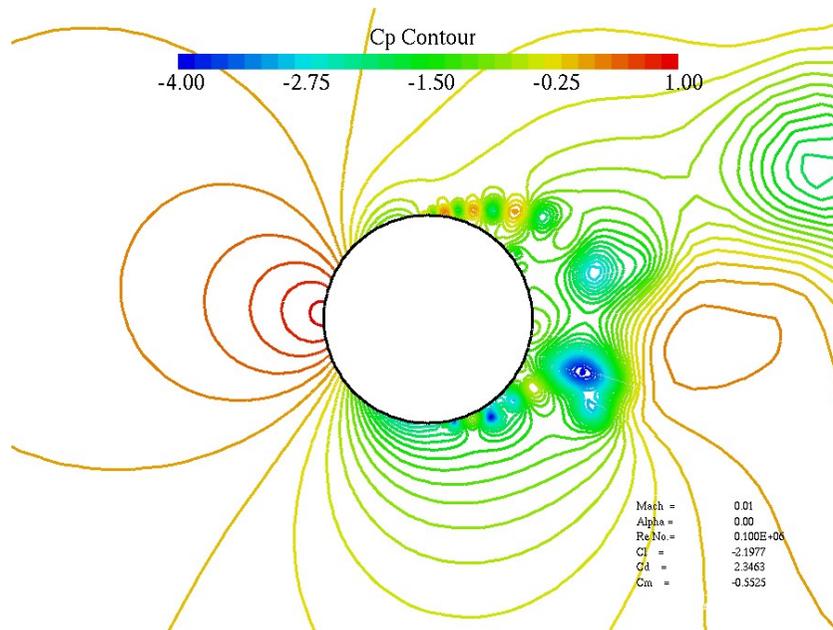
Two contour plots showing the pressure ratio P_s distribution. The top plot is for the SLAU scheme, showing a smooth, circular contour. The bottom plot is for the Roe scheme, showing a distorted, non-circular contour. Both plots include a color scale from 1.00 (blue) to 1.00 (red).

SLAU

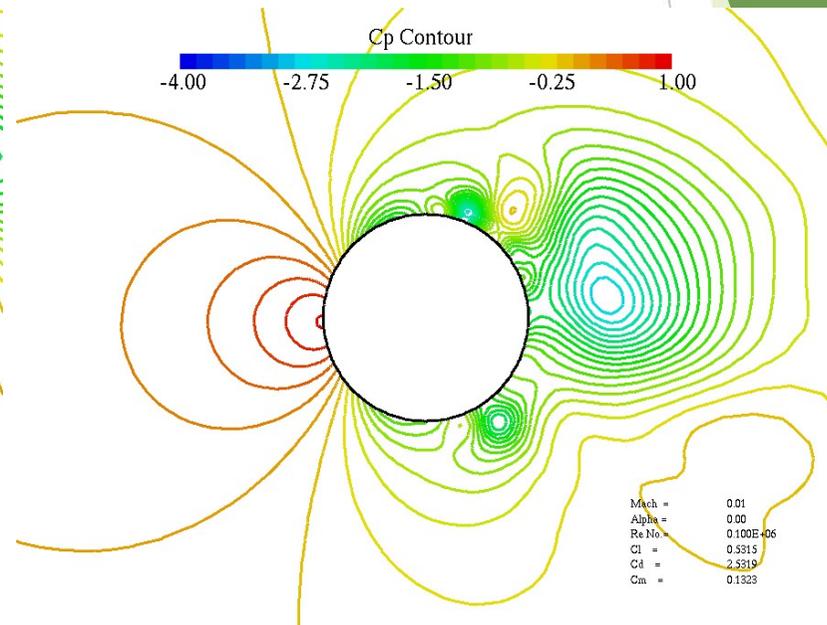
Roe

基本SLAUの特性(3)

円柱まわりの剥離流 $M_\infty=0.01$



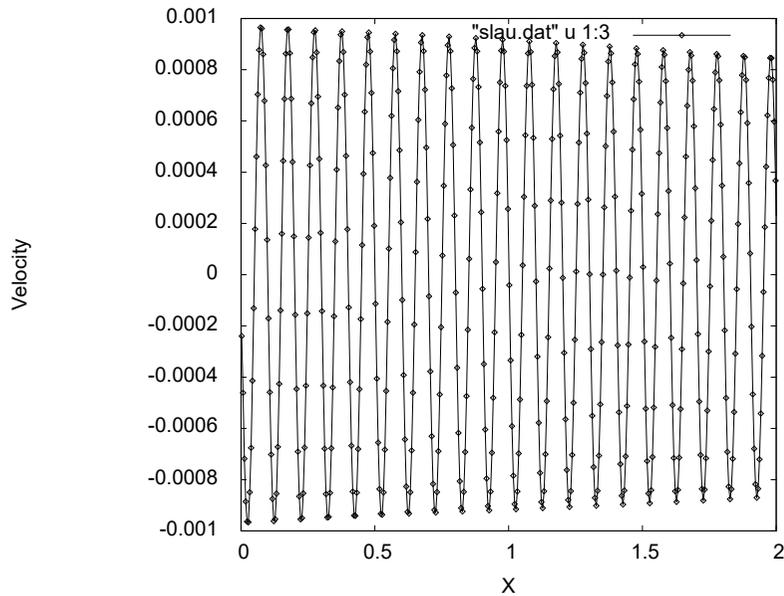
SLAU リミター無し3次精度 MFGS陰解法



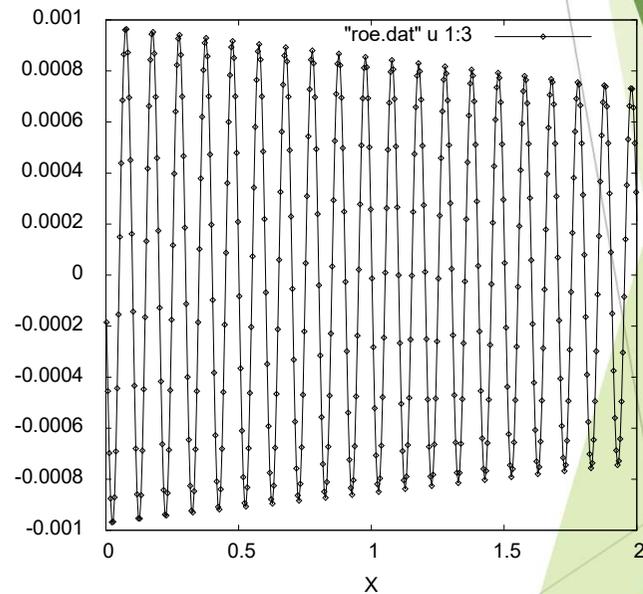
Roeリミター無し3次精度 MFGS陰解法

基本SLAUの特性(4) 音の伝播 (陽解法)

速度分布

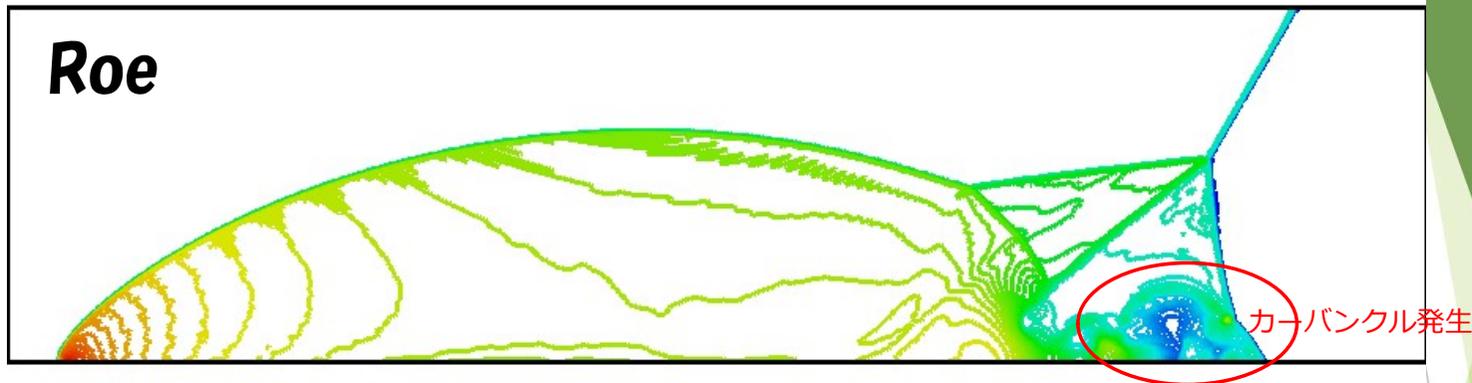


SLAU リミター無し3次精度 2段階陽解法



Roe リミター無し3次精度 2段階陽解法

基本SLAUの特性(5) 二重マツハ反射（カーバンクルの抑制）



Applications of all speed Riemann flux : SLAU(1)

Aeroacoustics of low M flow

Aeroacoustic Calculations of the 30P30N High-lift Airfoil using Hybrid RANS/LES methods: Modeling and Grid Resolution Effects
M. Terracol, E. Manoha, M. Murayama, K. Yamamoto, Kazuhisa Amemiya and Kentaro Tanaka

Acoustics from supersonic plume

Aeroacoustic Calculations of the 30P30N High-lift Airfoil using Hybrid RANS/LES methods: Modeling and Grid Resolution Effects
M. Terracol, E. Manoha, M. Murayama, K. Yamamoto, Kazuhisa Amemiya and Kentaro Tanaka

Compressor cascade

Parameter study on numerical simulation of corner separation in LMFA-NACA65 linear compressor cascade
Gao Feng, Ma Wei, Sun Jinjing, Jérôme Boudet, Xavier Ottavy, Liu Yangwei, Lu Lipeng and Shao Liang

Flow around wind turbine

CFD simulations of a wind turbine for analysis of tip vortex breakdown
K Kimura, Y Tanabe, T Aoyama, Y Matsuo, C Arakawa and M Iida

Transonic Buffet

Transonic Buffet Simulation over Supercritical Airfoil by Unsteady-FaSTAR Code
Takashi Ishida, Keiichi Ishiko, Atsushi Hashimoto, Takashi Aoyama and Kuniyuki Takekawa

Higher order FR method

Toward Accurate Simulation of Shockwave-Turbulence Interaction on Unstructured Meshes: A Coupling of High-Order FR and LAD Schemes
Takanori Haga and Soshi Kawai

Applications of all speed Riemann flux : SLAU(2)

Turbulent flow

Large-scale analysis of unconfined self-similar Rayleigh-Taylor turbulence

Olivier Souldard, Jérôme Griffond, and Benoît-Joseph Gréa

Transonic turbulent flow

Hybrid LES/RANS Simulations of Transonic Flowfield around a Rocket Fairing

Seiji Tsutsumi, Ryoji Takaki, Yoshiki Takama, Kentaro Imagawa, Kazuyuki Nakakita and Hiroyuki Kato

Combustion in hybrid rocket

Polymer Combustion as a Basis for Hybrid Propulsion: A Comprehensive Review and New Numerical Approaches
Vasily Novozhilov, Paul Joseph, Keiichi Ishiko, Toru Shimada, Hui Wang and Jun Liu

Turbulent combustion

Large-Eddy Simulation of High-Frequency Combustion Instability in a Single-Element Atmospheric Combustor

Shingo Matsuyama, Dan Hori, Taro Shimizu, Shigeru Tachibana, Seiji Yoshida and Yasuhiro Mizobuchi

Supersonic reactive flow

Numerical study on wall pressure over cone region of blunt-nosed body in high enthalpy shock tunnel HIEST

Tomoaki Ishihara, Yousuke Ogino, Takumikino and Naofumi Ohnishi

Flow control

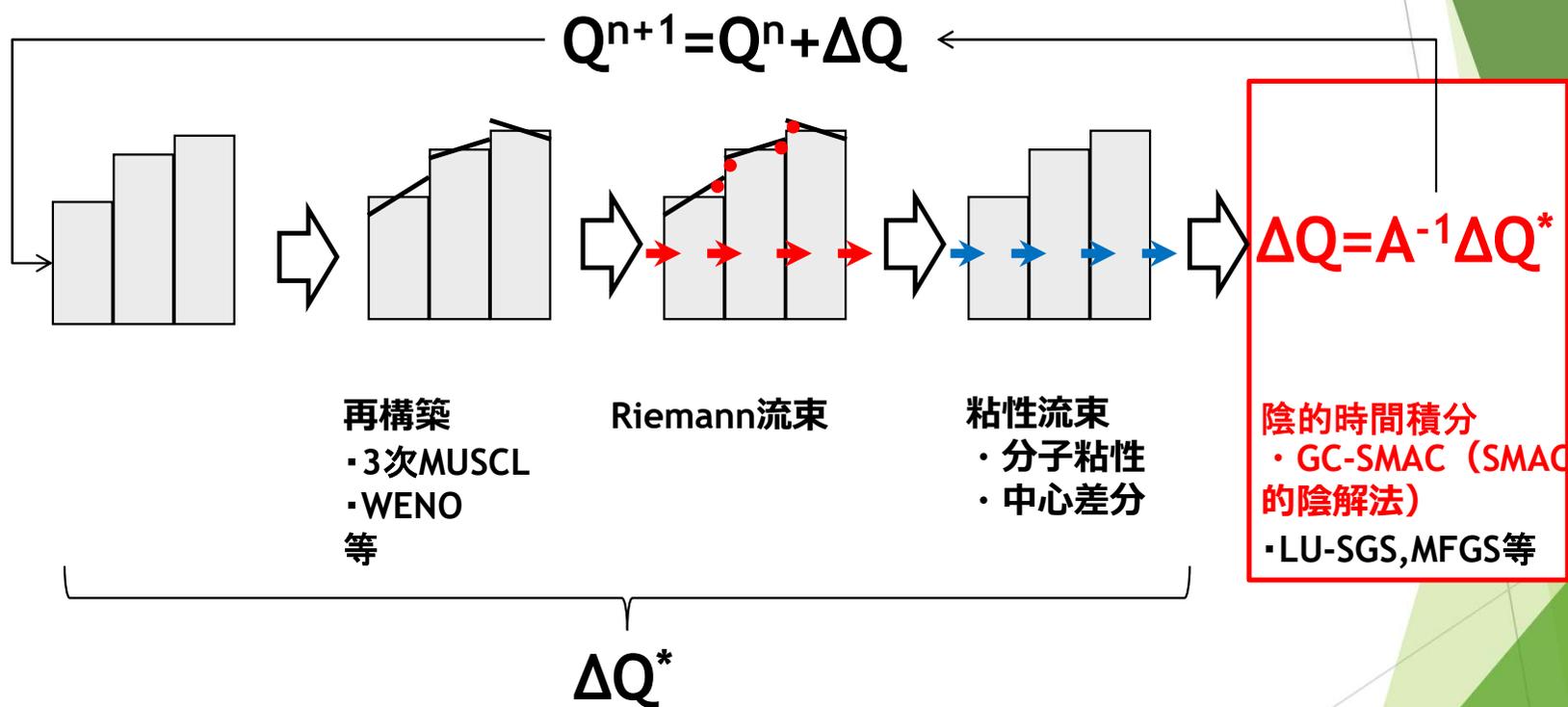
Flow Control Mechanisms of the Karman-Vortex Generator in Conical Diffuser Separation

Yang Jinwen, Zhang Yufei and Chen Haixin

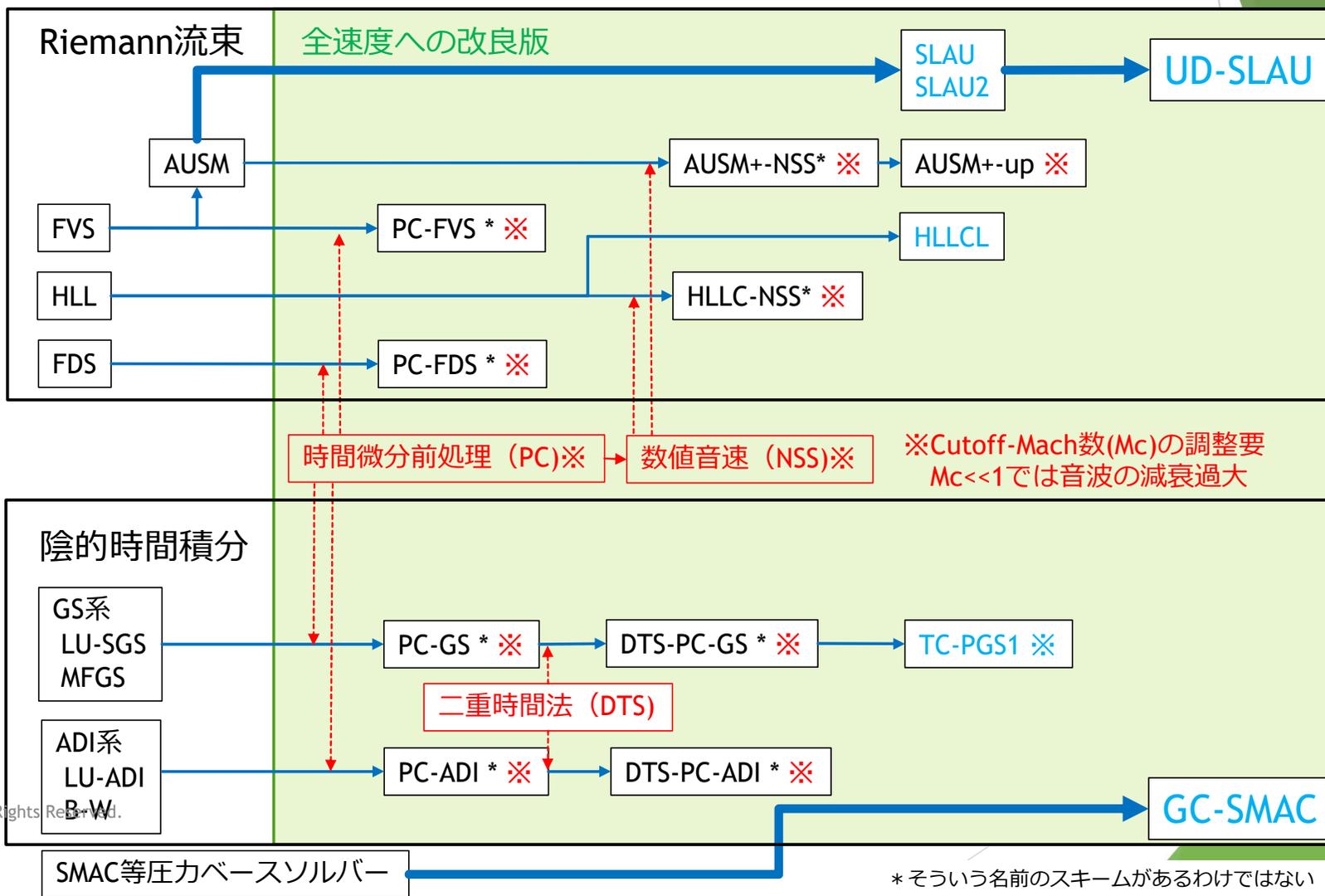
目次

- はじめに
- 有限体積法と陰的MUSCLの基本
- 全速度Riemann流速SLAUの基本的な検証と利用例
- **全速度陰解法GC-SMAC**
 - **陰解法色々とGC-SMACの特徴**
 - GC-SMACの導出
 - 数値例
- 圧縮性・非圧縮性CFDスキーム相違の鍵

陰的MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) の計算手順



全速度スキームキーコンポーネントの発展と概要



問題意識と長年の疑問

圧縮性NS方程式は全マッハ (M) 数の基礎式なので、圧縮性CFDスキームも全 M 数対応可能になるべき。

SLAUにより $M < 0.1$ でも精度よく計算できるようになった。 ($M \ll 0.1$ の問題点とその解消については省略)

(低 M 数用圧縮性ソルバーの先駆の) 時間微分前処理法で必要だった調整パラメータ：カットオフマッハ数 (M_c) をRiemann流速のSLAUでは取り除けたが陰解法にはまだ残っている。

($M_c \rightarrow 0$ で発散する) M_c のない全速度圧縮性スキームはできるのか？

そもそも、圧縮性・非圧縮性CFDの違いはどこから来たのか？

時間幅について無条件安定の δ フォーム陰解法

$$\frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + L(Q^{n+1}) = 0$$

$$Q^n + \delta Q = Q^{n+1}$$

$$\frac{1}{\Delta t} \delta Q + L(Q^n + \delta Q) \approx \frac{1}{\Delta t} \delta Q + L(Q^n) + \frac{\partial L}{\partial Q} \delta Q = 0$$

$$\left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial L}{\partial Q} \right) \delta Q = -L(Q^n)$$

$$\left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial Q} \right) \delta Q = -L(Q)$$

L. H. S.

R. H. S.

$$\because L(Q) = 0$$

差分近似 L は何かのオペレーター

変動量 δQ の導入

近似線形化と δ フォームの導入

ここまでは式通り
巨大な一次方程式を正直に解くのは難しい

右辺を近似しても定常解は不変
L. H. S. の近似方法がカギ

定常解の条件

代表的な圧縮性CFD用の陰解法

▶ ADI系（構造格子法専用）

- ▶ 格子方向毎の因子分解を用い一次元化。計算が軽いが因子分解誤差でクーラン数を大きく取れない。
 - ▶ Beam&Warming法（1976）：中心差分+二次数値粘性からなるL. H. S. のブロック三重対角行列を解く
 - ▶ 対角化ADI法（Pullium他, 1981）：Beam&Warming法に特性変数への近似変換を用いて計算量削減
 - ▶ LU-ADI法（大林他, 1986）：L. H. S. を一次風上で近似さらにFVSのアイデアを用いて前後スイープに分解
 - ▶ 風上化と対角化を併用した手法がベスト

▶ GS系（非構造格子法にも利用可能）

- ▶ 何らかのGS反復の利用が基本。L. H. S. に一次風上を用い行列の優対角性を維持。
 - ▶ ブロックSGS (Mulder & van Leer?)：一次風上近似でできるブロック対角行列をSymmetric Gauss-Seidelで解く
 - ▶ LU-SGS (Jameson&Turkel, 1981)：スペクトル半径を用いて風上化。行列反転をスカラーの除算に簡略化。
 - ▶ MFGS (嶋, 1997)：LU-SGSに逆線形化等を導入、行列計算をなくして高速化
 - ▶ TC-PGS1 (嶋, 2008)：エントロピー変数への変換と前処理法のエッセンスを導入

GC-SMACの特徴

- ▶ **前ページ掲載の手法と無関係**
 - ▶ ADIは使わないので非構造格子にも利用可能
 - ▶ (MFGSやTC-PGSのような) SGS改良版ではない
- ▶ **ブロック行列反転を必要としない**
- ▶ **$M < 0.01$ のほぼ非圧縮の領域まで使えることが最大の特徴であるが高マッハ数でも性能は落ちない**
- ▶ **データアクセスパターンはMFGSなどと類似でコードの大部分が流用可能**

目次

- はじめに
- 有限体積法と陰的MUSCLの基本
- 全速度Riemann流速SLAUの基本的な検証と利用例
- **全速度陰解法GC-SMAC**
 - 陰解法色々とGC-SMACの特徴
 - **GC-SMACの導出**
 - 数値例
- 圧縮性・非圧縮性CFDスキーム相違の鍵

GC-SMACの導出(1)

圧縮性NS方程式の（速度，圧力，エントロピー）変数表記からスタート

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{R}_u = 0$$

粘性項

$$p_t + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + R_p = 0$$

粘性項

$$s_t + \mathbf{u} \cdot \nabla s + R_p = 0$$

粘性項

←エントロピーのみが $\nabla \cdot \mathbf{u}$ で変わらない唯一の熱力学変数。
スキーム構築には、ほとんど関係しないので簡単化のために説明上は省略

一次精度陰解法を用いて δ フォームで時間方向のみ半離散化

$$\delta \mathbf{u} + \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \delta p + \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right\} = -\delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{R}_u \right\} = \delta \mathbf{u}^*$$

$$\delta p + \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \delta p + \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial R_p}{\partial p} \delta p \right\} = -\delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + R_p \right\} = \delta p^*$$

GC-SMACの導出 (2)

ベクトル表記を導入

$$[\mathbf{I} + \delta t \mathbf{A}] \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^* \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_u + {}_u \mathbf{A}_p + {}_p \mathbf{A}_u + {}_p \mathbf{A}_p \}] \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^*$$

$${}_u \mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n \cdot \nabla + \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O\left(\frac{U}{L}\right)$$

$${}_u \mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \nabla \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O\left(\frac{1}{\rho L}\right)$$

$${}_p \mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho c^2 \nabla \cdot & 0 \end{pmatrix} = O\left(\frac{\rho c^2}{L}\right)$$

$${}_p \mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}^n \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \end{pmatrix} = O\left(\frac{U}{L}\right)$$

GC-SMACの導出(3)

近似因数分解

$$[\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_u + {}_u \mathbf{A}_p + {}_p \mathbf{A}_u + {}_p \mathbf{A}_p \}] \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^*$$

$$[\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_u \}] \underbrace{[\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_p + {}_p \mathbf{A}_p + {}_p \mathbf{A}_u \}]}_{\delta \mathbf{s}^{**}} \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^*$$

※ ${}_p \mathbf{A}_u$ が誤差に出ず、低マッハ数で因数分解誤差が最小の唯一の二項分解である。

これは次の2stepで解かれる

移流Step:
$$\delta \mathbf{u}^{**} + \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^{**} + \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}^{**} \right\} = \delta \mathbf{u}^*$$
$$\delta p^{**} = \delta p^*$$

圧力Step:
$$\delta \mathbf{u} + \delta t \frac{1}{\rho} \nabla \delta p = \delta \mathbf{u}^{**}$$
$$\delta p + \delta t \left(\mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \right) \delta p + \delta t \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} = \delta p^{**}$$

この順番は非圧縮CFDのSMACと同じ。
SMACがなぜこの順番なのかの説明にもなっている。

GC-SMACの導出 (4)

移流Stepは容易に解ける。
鍵は、圧力Stepをどう解くか？
非圧縮性CFDのSMACのアイデアを利用する

$$\delta p + \delta t \left(\mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \right) \delta p + \delta t \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} = \delta p^{**}$$

代入

$$\delta \mathbf{u} + \delta t \frac{1}{\rho} \nabla \delta p = \delta \mathbf{u}^{**}$$

$$\delta p + \delta t \left(\mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \right) \delta p - \delta t^2 c^2 \nabla \cdot \nabla \delta p = \delta p^{**} - \delta t \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^{**}$$

↓ Mach→0

$$\nabla \cdot \nabla \delta p = \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^{**}$$

Mach→0で非圧縮性CFDのSMAC法に一致
SMACを含む一般化なので
GC (Generalized Compressible) -SMACと呼ぶ。

GC-SMACの導出 (5)

圧力方程式の離散化について、簡単化のため、非粘性で考える。
構造/非構造格子に応用容易な有限体積法で離散化

$$\delta p_i + \frac{\delta t}{V} \mathbf{u}_i \cdot \sum_j \delta p_{i,j} \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} - \frac{c^2 \delta t^2}{V} \sum_j \nabla \delta p_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} = R.H.S.$$

移流項に風上法を用いて離散化して整理すると
LU-SGSと類似の離散化式が得られる。

$$\delta p_i + \frac{\delta t}{V} \sum_j \left[\frac{\sigma_{i,j}}{2} \delta p_i + \frac{\hat{V}_{ni,j} - \sigma_{i,j}}{2} \delta p_j \right] ds_{i,j} = R.H.S.$$

$$\sigma_{i,j} = |V_{ni,j}| + 2Cnl_{i,j}c \quad : \text{圧縮性のスペクトル半径の音速のみ} 2Cn/\text{倍}$$

音速

$$Cnl_{i,j} = \frac{c \delta t}{\Delta h_{i,j}} \quad : \text{音速ベースの局所クーラン数}$$

GC-SMACの右辺の評価

δ 形式で書かれているので、右辺には、左辺と独立に様々な離散化手法が利用可能。

ここではSLAU系Riemann流束を用いたMUSCL法を利用する。

$$\bar{Q}_t + \frac{1}{V_i} \sum_j (\tilde{E}_{i,j} - \tilde{R}_{i,j}) ds_{i,j} = 0 \quad : \text{保存系での有限体積表記}$$

エントロピー変数での右辺評価は、変数変換により得られる。
収束すれば、保存変数での収束解が得られる。

$$\delta s^* \equiv \frac{\partial s}{\partial Q} \left[-\delta t \frac{1}{V_i} \sum_j (\tilde{E}_{i,j} - \tilde{R}_{i,j}) ds_{i,j} \right]$$

GC-SMACの計算手順

▶ 非定常計算では下記をニュートン反復（数回）、定常計算なら一回でよい。

1. MUSCL法などを用いて右辺を計算
2. 残差 ΔQ を変換マトリックスでエントロピー変数 Δs に変換
3. 速度とエントロピーについての線型方程式をGauss-Seidel反復で緩和。繰り返しは数回。
4. 圧力についての線型方程式をSOR反復等で緩和。繰り返しは20-250回程度
5. 残差 Δs を変換マトリックスでエントロピー変数 ΔQ に変換
6. $Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q$

▶ 次の時間ステップへ

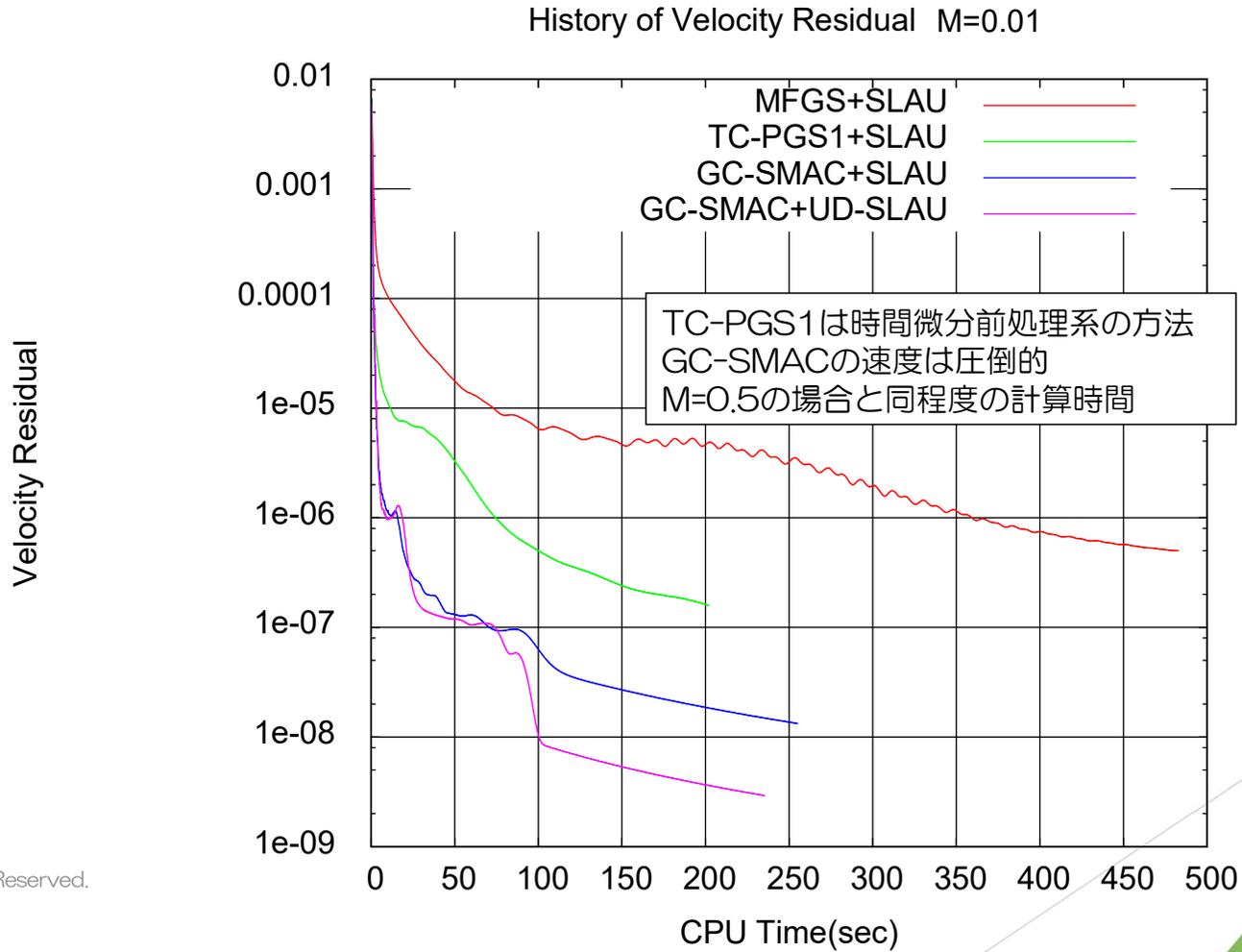
トータルの
機能はLU-SGS等と同じ

目次

- はじめに
- 有限体積法と陰的MUSCLの基本
- 全速度Riemann流速SLAUの基本的な検証と利用例
- **全速度陰解法GC-SMAC**
 - 陰解法色々とGC-SMACの特徴
 - GC-SMACの導出
 - **数値例**
- 圧縮性・非圧縮性CFDスキーム相違の鍵

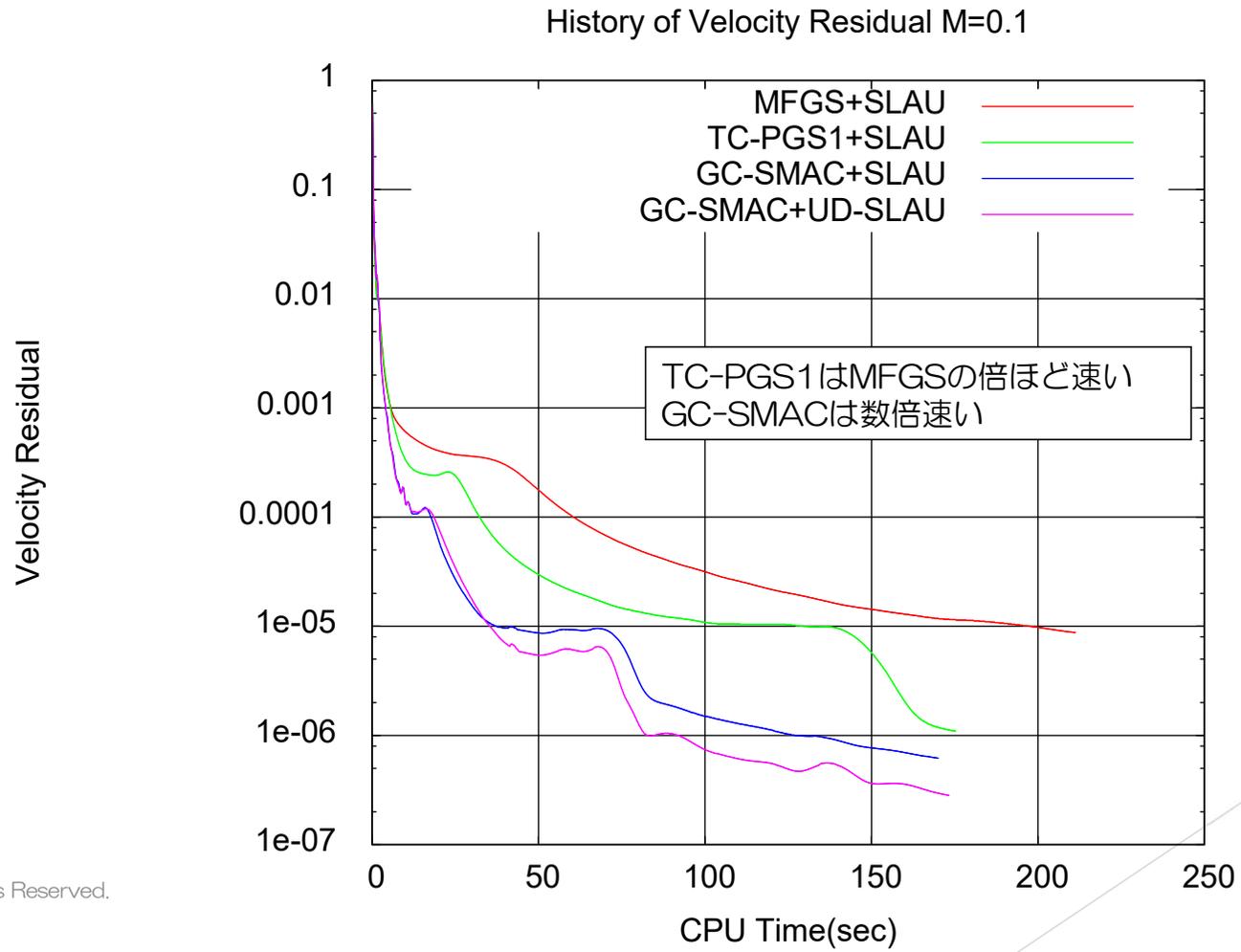
GC-SMACの数値例

翼型周り非粘性流れの収束履歴(M=0.01)



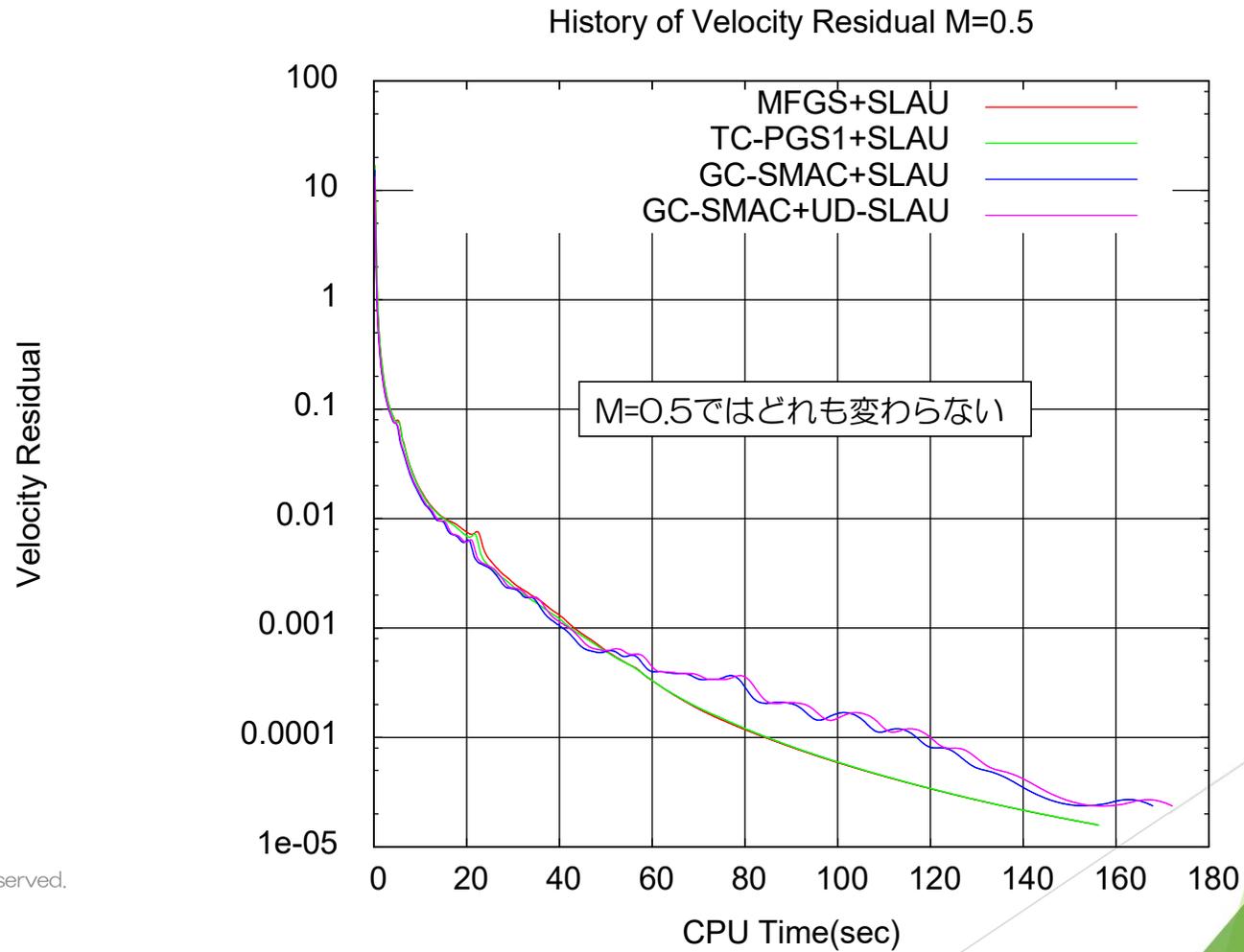
GC-SMACの数値例

翼型周り非粘性流れの収束履歴(M=0.1)



GC-SMACの数値例

翼型周り非粘性流れの収束履歴(M=0.5)



ノート

- (1) 定常解への収束特性のみを示したが、非定常解析のNewton反復の収束性もほぼ同じ**
- (2) 圧力方程式の数値解法には現状初歩的なSOR法を用いている。非圧縮性CFDの分野でのより進んだ方法による改良が期待される。**
- (3) 現状の二項分解でなく次に示す三項分解も可能。この場合には圧力方程式が対称行列となり高効率線型解法利用の可能性がある。**

目次

- はじめに
- 有限体積法と陰的MUSCLの基本
- 全速度Riemann流速SLAUの基本的な検証と利用例
- 全速度陰解法GC-SMAC
 - 陰解法色々とGC-SMACの特徴
 - GC-SMACの導出
 - 数値例
- **圧縮性・非圧縮性CFDスキーム相違の鍵**

3項への因数分解と各項の意味

$$\left[\mathbf{I} + \delta t \left\{ {}_u \mathbf{A}_u + {}_u \mathbf{A}_p + {}_p \mathbf{A}_u + {}_p \mathbf{A}_p \right\} \right] \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^*$$



低マッハ数では突出して大きい ${}_p \mathbf{A}_u$ が誤差項に出ない3項以上への近似因数分解は一通りしかない。

$$\left[\mathbf{I} + \delta t \left\{ {}_u \mathbf{A}_u \right\} \right] \left[\mathbf{I} + \delta t \left\{ {}_u \mathbf{A}_p + {}_p \mathbf{A}_u \right\} \right] \left[\mathbf{I} + \delta t \left\{ {}_p \mathbf{A}_p \right\} \right] \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^*$$

①速度場の移流拡散

②音波

③圧力場の移流拡散

①③の数値解法は容易。②が難しい。

密度ベースと圧力ベーススキームの関係の要点

②音波項を書き下す

$$\delta \mathbf{u}^{**} + \delta t \frac{1}{\rho} \nabla \delta p^{***} = \delta \mathbf{u}^{**} \quad (1)$$

$$\delta p^{***} + \delta t \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^{***} = \delta p^{**} \quad (2)$$

離散化して(1)(2)が解ければ良い。手法は複数ある。

1. 圧力ベース (SMAC等) 的手法 :

(1)を(2)に代入し、圧力のみを未知数として解く

2. 密度ベース (LU-SGS等) 的手法 :

数値散逸を加えることで優対角化して、離散化した(1, 2)を直接解く

密度ベースと圧力ベーススキームの関係(1)

2. 密度ベースソルバー

一次元の場合の(1)(2)をベクトル表記

$$\begin{pmatrix} \delta u^{***} \\ \delta p^{***} \end{pmatrix} + \delta t \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \delta u^{***} \\ \delta p^{***} \end{pmatrix} = R.H.S \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(4)の離散化で出来る線型方程式を数値的に解く際、中心差分では優対角にならない。
優対角性は必要不可欠 (GS法の安定性、GMRES等の前処理行列など)
そこで、優対角化のために、Jacobianの正定値化 (= 風上化) を考える。
この正定値化が密度ベースソルバー陰解法の肝!

密度ベースと圧力ベーススキームの関係(2)

2. 密度ベースソルバー

スペクトル半径 σ を用いた風上化 (LU-SGS, MFGS等)

$$A^{\pm} = \frac{A \pm \sigma I}{2} \quad (4)$$

$$A \delta_x \approx A^+ \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{2\Delta x} + A^- \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{2\Delta x} = A \frac{\delta_{i+1} - \delta_{i-1}}{2\Delta x} - \sigma \frac{\delta_{i+1} - 2\delta_i + \delta_{i-1}}{2\Delta x} \quad (5)$$

$$\sigma = c \quad (6)$$

音速が係数の数値散逸が加わるので、低マッハ数では速度場に対して散逸過大

密度ベースと圧力ベーススキームの関係(3)

2. 密度ベースソルバー

速度場と圧力場に異なる数値散逸を用いることも可能 (TC-PGS1 \cong 時間微分前処理法)

$$\mathbf{A}^{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm \sigma_u & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & \pm \sigma_p \end{pmatrix} \quad (7)$$

優対角性を満たす最小の組は下記で与えられる。

$$\sigma_u = \alpha c \quad (5)$$

$$\sigma_p = \frac{c}{\alpha} \quad (6)$$

α が 0 (M) であれば、速度場に対する数値散逸は適切。しかし、圧力場の数値散逸は過大。

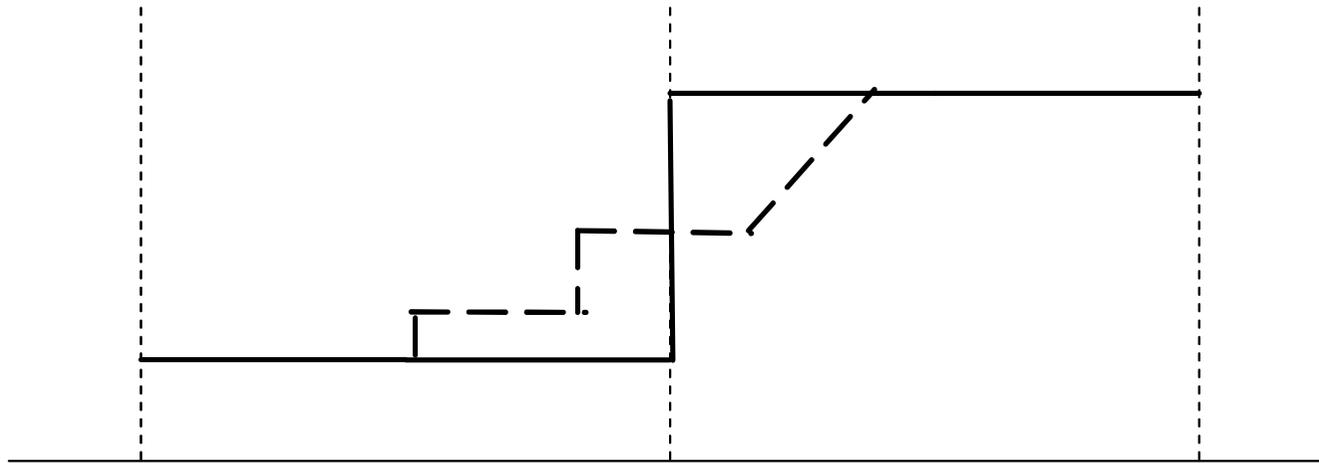
まとめ

- (1) 全マッハCFDスキームの基本と検証・応用例を示した。
- (2) マッハ数0.1以下で計算効率を数倍向上できる新しい陰解法GC-SMACを示した。
- (3) GC-SMAC導出の過程で判明した圧縮性・非圧縮性スキームの関係性について示した。

**ご清聴ありがとうございました。
ご質問をどうぞ。**

以下, 参考資料

Riemann流束の働き



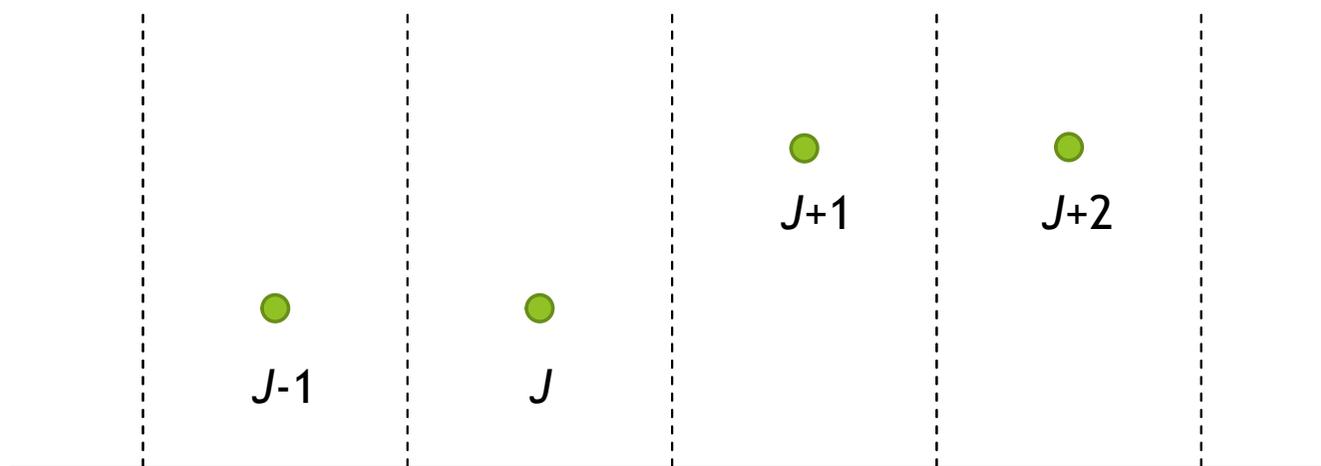
**圧縮性流体では不連続な初期値にも時間発展解が存在
→Riemann初期値問題→Riemann流束**

小さい跳びは適切な数値散逸となる

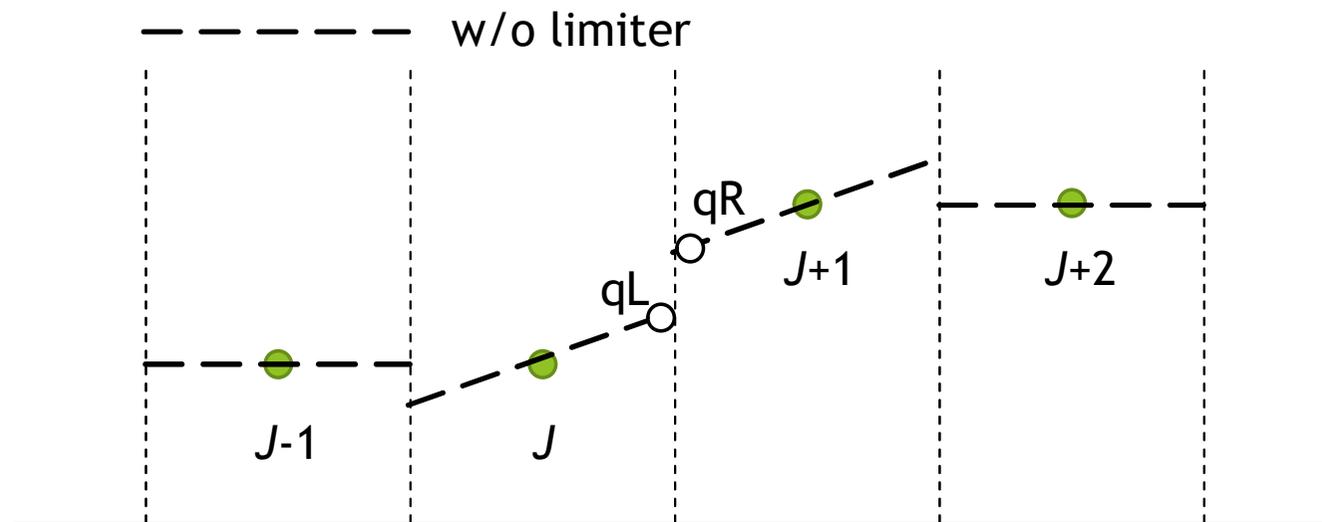
2022 JAXA All Rights Reserved.

圧縮性CFDの複雑な部分をRiemann流束に押し込んでいる。

再構築における勾配制限関数



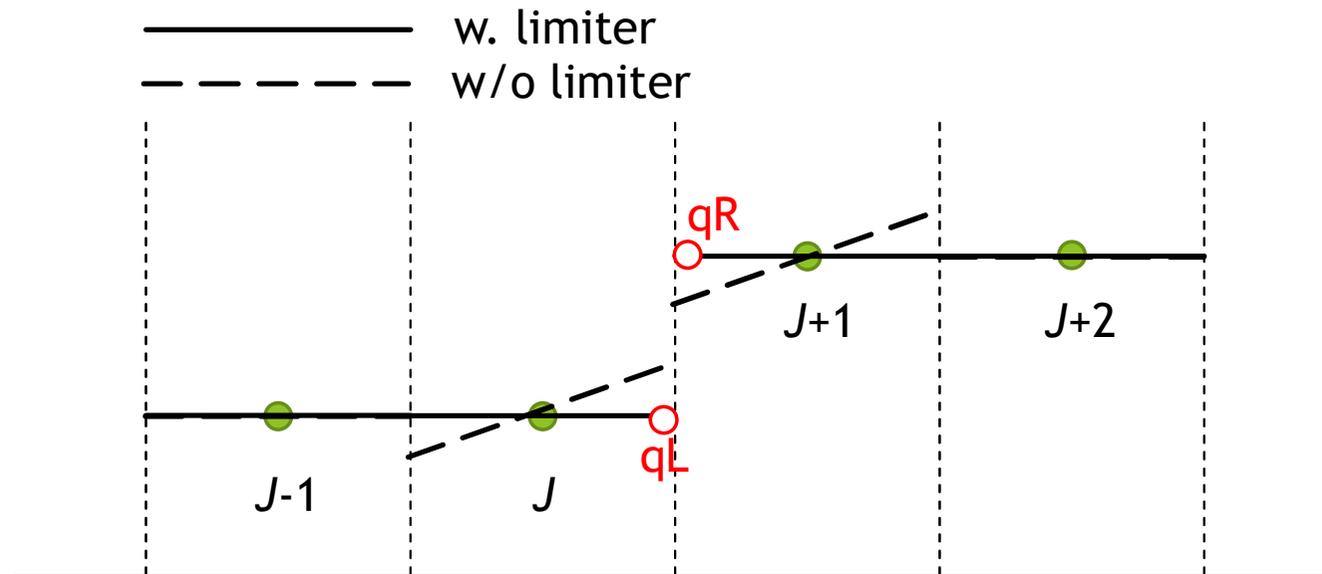
再構築における勾配制限関数



$$q_L = q_i + \frac{\Delta x}{2} q_{xi}$$

$$q_R = q_{i+1} - \frac{\Delta x}{2} q_{xi+1}$$

再構築における勾配制限関数



$$q_L = q_i + \phi_i \frac{\Delta x}{2} q_{xi}$$

$$q_R = q_{i+1} - \phi_{i+1} \frac{\Delta x}{2} q_{xi+1}$$